

# Теория вероятностей

Первый модуль, 2023/2024

**Катышев П.К.**  
профессор математики  
pkatish@nes.ru

## Course information

---

**Course Website:**

**Instructor's Office Hours:**

**Class Time:**

**Room Number:**

**TAs:** [Names and contact information]

## Course description

---

Курс «Теория вероятностей» является первым в ряду вероятностно-эконометрических курсов Вероятность – Статистика – Эконометрика.

Основные цели курса

- изложить основы теории вероятностей;
- сформировать теоретические основы для изучения математической статистики и эконометрики;
- познакомиться с принципами вероятностно-статистического моделирования.

Курс состоит из пяти основных частей:

1. Основы теории вероятностей. Простейшие вероятностные схемы.
2. Случайные величины и случайные векторы.
3. Производящие функции. Многомерное нормальное распределение.
4. Предельные теоремы: закон больших чисел, центральная предельная теорема. Асимптотическая нормальность.
5. Основы теории случайных процессов.

## Course requirements, grading, and attendance policies

---

Предполагается, что студенты знают математический анализ и линейную алгебру в объеме стандартных университетских курсов.

Курс состоит из четырнадцати лекций (28 часов) и семи семинаров (14 часов). Студенты должны выполнить шесть еженедельных домашних заданий. Каждая домашняя работа оценивается по 100-балльной системе. Общая оценка за домашние работы есть сумма оценок за каждую работу, деленная на шесть. По окончании курса проводится письменный экзамен, оцениваемый по 100-балльной системе. На экзамене разрешено пользоваться записями на одном листе бумаги формата А4. Оценка за курс (по 100-балльной системе) складывается из

80% оценки за экзамен и 20% оценки за домашние работы. Эта оценка переводится в оценку по пятибалльной системе. **Если оценка за экзамен меньше 25 баллов, то независимо от остальных оценок студент получает за курс неудовлетворительную оценку.** Переэкзаменовка имеет тот же формат, что и основной экзамен.

## Course contents

---

### **I. Основы теории вероятностей. Простейшие вероятностные схемы (3 лекции)**

1. Эксперимент со случайным исходом.
2. Вероятностное пространство. Случайные события. Действия с событиями.
3. Конечные вероятностные пространства. Классическая вероятность. Элементы комбинаторики.
4. Геометрическая вероятность.
5. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события.
6. Общее вероятностное пространство. Сигма-алгебра случайных событий. Вероятность, ее свойства. Продолжение вероятности с алгебры событий на порожденную ею сигма-алгебру.

### **II. Случайные величины и случайные векторы (6 лекций)**

1. Случайная величина, ее распределение. Дискретные и непрерывные случайные величины.
2. Числовые характеристики случайных величин (среднее значение, дисперсия, медиана и т.п.).
3. Примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
4. Случайные векторы их распределения.
5. Независимые случайные величины. Ковариация, коэффициент корреляции.
6. Условное распределение.

### **III. Производящая функция. Многомерное нормальное распределение (2 лекции)**

1. Определение производящей функции случайной величины и случайного вектора. Свойства производящих функций.
2. Многомерное нормальное распределение. Его свойства.
3. Распределения, связанные с нормальным распределением (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера). Лемма Фишера.

### **IV. Предельные теоремы (2 лекции)**

1. Виды сходимостей последовательностей случайных величин: почти наверное, в среднем, по вероятности, по распределению.
2. Связь сходимости производящих функций и сходимости распределений.
3. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел.
4. Центральная предельная теорема. Нормальное приближение биномиального и пуассоновского распределений.
5. Асимптотическая нормальность.

### **V. Основы теории случайных процессов (1 лекция)**

1. Случайный процесс. Конечномерные распределения случайного процесса.

## 2. Стационарные процессы.

### Description of course methodology

Теоретический материал, излагаемый на лекциях, сопровождается многочисленными примерами. На семинарах, в основном, решаются задачи по темам текущих лекций.

Выборочные задачи семинаров

**Задача 1.** Пусть  $X$  – случайная величина, имеющая непрерывную строго возрастающую функцию распределения  $F(x)$ . Найдите распределение случайной величины  $F(X)$ .

**Задача 2.** Пусть  $X_1, X_2$  – независимые случайные величины, имеющие геометрическое распределение:  $P(X_i = k) = q_i^{k-1} p_i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $p_i + q_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ .

(а) Докажите, что случайная величина  $Y = \min(X_1, X_2)$  также имеет геометрическое распределение.

(б) Найдите  $E(Y)$ .

**Задача 3.** Найти среднее и дисперсию показательной случайной величины.

### Sample tasks for course evaluation

---

Выборочные задачи домашних работ.

**Задача 1.** Прибор состоит из двух блоков. Время безотказной работы каждого блока имеет показательное распределение с параметрами  $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ , причем отказ каждого блока происходит независимо от другого. Прибор выходит из строя, если хотя бы один блок выходит из строя. Чему равно среднее время безотказной работы прибора?

**Задача 2.** На отрезке  $[0, 1]$  оси  $Ox$  случайным образом выбирается точка (всё происходит на координатной плоскости). Пусть  $X$  – расстояние от этой точки до точки  $(0, 1)$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $X$ .

**Задача 3.** Пусть  $X_1, X_2$  – независимые пуассоновские случайные величины с параметрами  $\lambda_1, \lambda_2$  соответственно.

а) Найти условное распределение  $p_n(k) = \Pr(X_1 = k | X_1 + X_2 = n)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

б) Найти  $E(X_1 | X_1 + X_2 = n)$ .

Выборочные экзаменационные задачи.

#### Задача 1 10 очков

Способность работника предприятия описывается случайной величиной  $\theta$ , которая может принимать значения 0 или 1 с равными вероятностями. Производительность работника в течение дня  $t = 1, 2$  есть  $y_t = \theta + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t$ ,  $t = 1, 2$  – производственные шоки.

Предполагается, что  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – независимые случайные величины, не зависящие от  $\theta$  и принимающие значения 0 и 1 с вероятностями  $q$  и  $p$ , соответственно,  $p + q = 1$ .

Наблюдаются величины  $y_1, y_2$ . Найдите апостериорное распределение способности  $\theta$  для всех возможных значений наблюдений  $y_1, y_2$ .

### Задача 2

Пусть  $A_1 = [\xi_1, \eta_1]'$ ,  $A_2 = [\xi_2, \eta_2]'$ ,  $A_3 = [\xi_3, \eta_3]'$  – независимые двумерные стандартные нормальные векторы, рассматриваемые как точки на двумерной плоскости.

(а) Найдите распределение длины медианы  $A_1M_1$  треугольника  $A_1A_2A_3$ .

(б) Найдите среднее значение этой длины.

### Задача 3

Интеграл  $J = \int_0^1 e^x dx$  вычисляется методом Монте-Карло, т.е. разыгрывается  $n$

независимых случайных величин  $x_1, \dots, x_n$ , равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$ , и

интеграл  $J$  оценивается величиной  $J_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{x_i}$ . Найдите число  $n$  так, чтобы с

вероятностью, не меньшей 0.95, величина  $J_n$  отличалась бы от  $J$  не более, чем на  $\varepsilon = 0.02$ .

## Course materials

---

### Required textbooks and materials

1. Sh. Ross. A First Course in Probability, Pearson, Prentice Hall, 2009
2. Гнеденко Б.В. (1988). Курс теории вероятностей, Москва: «Наука».

### Additional materials

1. А.Н.Ширяев. Вероятность, МЦНМО, 2011
2. Чистяков В.П. (2000) Курс теории вероятностей (5-е издание). М., «Агар».

## Academic integrity policy

---

Cheating, plagiarism, and any other violations of academic ethics at NES are not tolerated.